ВВЕДЕНИЕ

В.1. Понятие о численных методах

Проектирование и отработка современных летательных аппаратов, их отдельных узлов и блоков, а также других технических систем связаны с теоретическими расчетами и исследованиями, предваряющими выбор определяющих параметров конструкций. Эти расчеты проводятся с использованием вычислительных средств (компьютеров и их систем) и вычислительных методов. При этом обычно выполняются следующие этапы.

1. *Физическая постановка задачи.* Результатом этого этапа является общая формулировка задачи в содержательных терминах, т.е. что дано и что требуется определить. Например, рассчитать траекторию полета ракеты при заданных тяге двигателей, массе ракеты, ее аэродинамических характеристиках, при определенных метеоусловиях и др. Как правило, этот этап выполняется специалистом в конкретной предметной области.

2. Поиск, выбор или модификация некоторой математической модели, адекватной физической постановке задачи. На этом этапе осуществляются:

— выделение (запись) основных математических уравнений, соотношений, аппроксимационных формул, описывающих задачу;

— выделение (запись) дополнительных математических уравнений, связей, граничных или краевых условий;

— предварительное (априорное) обоснование математической модели.

Этот этап является очень важным, так как ошибочная или неудачная модель, неадекватная физической, сводит «на нет» все дальнейшие усилия по проектированию изделия. Заметим, что при решении многих задач выбираются, как правило, общепринятые математические модели.

3. *Разработка, выбор или модификация математического (аналитического, приближенно-аналитического или численного) метода,* наиболее целесообразного и экономичного. Этот этап осуществляется на основе имеющихся у исследователей знаний (субъективный подход), а также исходя из ресурсов компьютера — оперативной и внешней памяти, быстродействия, возможностей представления информации (объективный подход).

4. *Составление алгоритма.*

5. *Разработка программного обеспечения.*

6. *Решение задачи:* апостериорное обоснование модели и метода путем их методических и параметрических компьютерных исследований в привязке к реальному объекту. Этот этап включает выдачу рекомендаций и характеристик объекта в проектно-конструкторские подразделения.

В результате анализа полученного решения задачи может осуществляться переход к любому из описанных этапов для внесения соответствующих изменений. Изложенные этапы исследования прикладных задач схематически показаны на рис. В.1.

Рассмотрим пример простейшей физической и математической моделей. При заданном количестве микробов или концентрации некоторого вещества y_0

в начальный момент времени $t = t_0$ получить зависимость, описывающую их дальнейшее изменение во времени. При $t > t_0$ данная физическая модель описывается обыкновенным дифференциальным уравнением и начальным условием:

$$\frac{dy}{dt} - y = 0, \tag{B.1}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{B.2}$$

Таким образом, уравнение (B.1) и дополнительное (начальное) условие (B.2) составляют математическую модель (дифференциальную, так как ей соответствует дифференциальное уравнение). Сопоставление решения задачи (B.1), (B.2) с результатами эксперимента подтверждает адекватность физической и математической моделей.

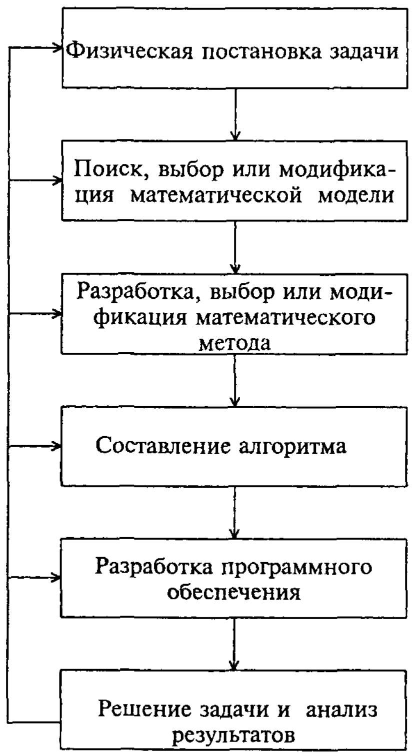

Рис. В.1

Другими классическими примерами простых математических моделей являются: определенный интеграл для нахождения площадей, объемов, длин кривых, центра тяжести тела и др.; система уравнений движения центра масс летательного аппарата с начальными условиями, заданными на старте; уравнение теплообмена, например, для изучения процесса охлаждения или нагрева тела при подводе, отводе тепла.

Классическим средством изучения математических моделей и исследований на их основе свойств реальных объектов являются *аналитические методы,* позволяющие получать точные решения в виде математических формул. Эти методы дают наиболее полную информацию о решении задачи, и они до настоящего времени не утратили своего значения. Однако, к сожалению, класс задач, для которого они могут использоваться, весьма ограничен. Поэтому решение широкого класса задач при отработке современных технических систем, как правило, осуществляется численными методами.

Численные методы — это методы приближенного решения задач прикладной математики, основанные на реализации алгоритмов, соответствующих математическим моделям. Наука, изучающая численные методы, называется также численным анализом, или вычислительной математикой.

Численные методы, в отличие от аналитических, дают *не общие, а частные решения,* которые определяются не в континуальных(Ω), а в дискретных областях изменения независимых переменных (Ω_h). При этом требуется выполнить достаточное количество арифметических и логических действий над числовыми и логическими массивами. В силу приближенного характера вычислений этот процесс в свою очередь связан с некоторыми основными требованиями или понятиями, относящимися к конкретным задачам и численным методам (схемам), — *устойчивостью,* зависящей от *хорошей обусловленности* задачи; *сходимостью, высокой точностью, экономичностью,* и параметрами методов — шагами дискретизации h_Ωили разбиения исходной областиΩ, в которой решается задача, количеством итераций (для итерационных методов), соотношениями шагов для неравномерного разбиения и др.

Некоторые из перечисленных здесь требований являются противоречивыми, поэтому при выполнении исследований чем-то приходится жертвовать, например, точностью или экономичностью метода. Часть из указанных понятий (сходимость, устойчивость, хорошая обусловленность) рассматриваются и наполняются конкретным содержанием при рассмотрении задач, которые решаются в основных разделах книги, поэтому дадим только их краткие определения.

Численный метод называется *сходящимся,* если при стремлении параметров метода к определенным предельным значениям (например, шагов сеткиh_Ω к нулю (при $h_\Omega \to 0$)) результаты расчета стремятся к точному решению, т.е. $\hat{y}\Big|_{h_\Omega \to 0} \to y\Big|_{\Omega}$ ($\hat{y}$ и y— приближенное и точное решения соответственно).

Задача является *хорошо обусловленной,* если при небольших изменениях входных данных результаты ее решения изменяются незначительно (непрерывная зависимость решения от исходных данных) и при любых исходных данных из возможного диапазона их изменения задача однозначно разрешима.

Рассмотрим пример плохо обусловленной задачи.

Пример В.1. Пусть задана система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 300x_1 + 400x_2 = 700, \\ 100x_1 + 133x_2 = 233. \end{aligned} \qquad (B.3)$$

Выяснить, является ли эта задача хорошо обусловленной.

□ Система (В.3) имеет точное решение $x_* = (x_{*1}, x_{*2})^T = (1;1)^T$. Пусть одно из исходных данных - число b = 233 изменилось на доли процента и вместо него приняли число $\tilde{b}$ = 232. Тогда получается решение $\tilde{x}_{*1}$= -3; $\tilde{x}_{*2}$= 4. Таким образом, при изменении b на 0,43% $\left(\frac{\Delta b}{233} \cdot 100\% = \frac{1}{233} \cdot 100\% = 0{,}43\%\right)$ компоненты решения x_{*1}, x_{*2} изменились соответственно в 3 и 4 раза. Таким образом, в соответствии с определением обусловленности задача (В.3) является плохо обусловленной, так как при небольшом изменении входных данных результаты ее решения изменились значительно.■

Численный метод называется *устойчивым,* если результаты расчета непрерывно зависят от входных (исходных) данных задачи (т. е. выполняется условие хорошей обусловленности задачи) и погрешность округления, связанная с реализацией численного метода, при заданных пределах изменения параметров численного метода остается ограниченной.

Решения, получаемые численными методами, в силу их приближенности содержат некоторые погрешности. Рассмотрим их источники и типы.

В.2. Погрешности вычислений

Один из типов погрешностей обусловлен *неадекватностью* выбранной математической модели исходной физической. Эта неадекватность в большей или меньшей степени присуща всем приближенно решаемым задачам. Данная погрешность является неустранимой, и она определяется апостериорным путем (на шестом этапе решения задачи (см. рис. В.1)). Остальные три типа погрешностей являются сугубо вычислительными и обусловлены следующими причинами.

Неточность (неопределенность) задания исходных данных приводит также к *неустранимым погрешностям,* связанным с точностью измерений или вычислений, или округлением данных.

Если мы устраним неопределенность в исходных данных, например, путем их фиксирования, и найдем решение с помощью какого-либо численного метода, то получим результат, не в точности соответствующий исходным данным. Это есть *погрешность численного* или какого-либо другого приближенного *метода* (например, приближенно-аналитического); именно такие погрешности будут оцениваться при рассмотрении численных методов. Эти оценки могут получаться до выполнения вычислений (априорные оценки) и после них (апостериорные оценки).

В компьютере все числа представляются в конечном виде, и поэтому при использовании вычислительного алгоритма реализуются ошибки арифметических и других операций над числами, а также *ошибки округления.*

Дадим некоторые понятия из теории погрешностей вычислительных действий над приближенными величинами.

Пусть x — точное, но, как правило, неизвестное значение величины, а $\hat{x}$ — ее известное приближенное значение.

Абсолютной погрешностью приближения $\hat{x}$ называется разность $\Delta\hat{x} = \left| x - \hat{x} \right|$ (в общем случае $\Delta\hat{x}$ имеет размерность величины x).