ПРЕДИСЛОВИЕ

Аналитические методы решения задач на отыскание наибольших и наименьших величин являются актуальными уже на протяжении многих веков развития человечества. Задачи на максимум и минимум были поставлены впервые античной наукой. Как наука теория экстремальных задач начала создаваться в начале XVII века, и затем она активно развивалась вплоть до наших дней. Большой вклад в ее развитие внесли такие крупнейшие ученые как П. Ферма, И. Ньютон, Г. Лейбниц, Я. Бернулли, Ж. Лагранж, Л. Эйлер, Ж. Пуанкаре, Л.В. Канторович, Л.С. Понтрягин, Н. Винер и др.

В наши дни, когда наука превратилась в силу планетарного масштаба, изменяя и среду обитания человека, и его социальное бытие, особым объектом исследования являются сложные системы и процессы. Под сложной системой понимают систему, если ее познание требует привлечения многих моделей и многих теорий [66, 106]. Управлением сложных систем занимается наука кибернетика (греч. *kybernetike* - наука об общих закономерностях процесса управления), целью изучения которой является разработка принципов, методов и средств оптимального управления.

Знание основных принципов и законов управления, основанных на математических методах оптимизации, позволяет эффективно управлять организационными системами, производством, делать прогнозы в финансовой деятельности и экономике, управлять космическими аппаратами и влиять на физические и биологические процессы, осуществлять синтез гуманитарных и естественных наук и открывать путь к новому пониманию природы, общества и человека.

В связи с запросами техники, экономики бурное развитие получили такие разделы теории оптимизации, как динамическое программирование, теория оптимального управления, методы решения экстремальных задач и анализа данных. Широкое распространение получили информационно-аналитические технологии, которые позволяют «обнаруживать знания в базах данных» и проводить «интеллектуальный анализ данных» (Data Mining) [40]. Особенностью этого направления является применение оптимизационных математических методов для автоматического получения закономерностей, параметров модели, а иногда и самой модели объекта или процесса [45,104].

Объектом курса методов оптимизации являются оптимизационные задачи. Предмет курса методов оптимизации составляют теория и методы решения однокритериальных и многокритериальных задач, поставленных на математических моделях.

В основу учебника положен многолетний опыт автора по чтению курса лекций «Методы оптимизации» на факультете прикладной математики Института криптографии, связи и информатики. Учитывая целевое назначение учебника, автор стремился рассмотреть достаточно узкий круг базовых оптимизационных задач, к решению которых, как показывает практика, сводятся многие специальные и прикладные задачи. Такой подход позволил рассмотреть фундаментальные теоретические вопросы с достаточной математической строгостью. Включение в курс «Методы оптимизации» доказательств, практически всех сформулированных утверждений, необходимо, по мнению автора, для привития будущим специалистам-аналитикам навыков формального обоснования применяемых методов и алгоритмов оптимизации.

Учебник состоит из трех частей. В каждой части приводятся решения типичных задач, иллюстрирующих применение основных теорем и методов, упражнения для самостоятельного решения в конце практически каждой главы.

В первой части рассмотрены методы решения экстремальных нецелочисленных конечномерных задач. Изучение методов оптимизации начинается с традиционного раздела, посвященного задаче линейного программирования и симплекс-методу. Большое внимание уделяется вопросам постоптимизационного анализа, имеющим непосредственное практическое значение. Во втором разделе изложение методов нелинейной оптимизации начинается с нетрадиционного для классических курсов метода пси-преобразования, построенного по схеме метода Монте-Карло. Особенность этого метода состоит в том, что на целевую функцию не накладывается практически никаких ограничений, кроме измеримости по Лебегу.

Для изложения группы методов типа покоординатного и наискорейшего спуска используется алгоритмическая схема, основанная на известных понятиях замкнутого отображения и функции спуска. Благодаря этому доказывается ряд результатов, на основе которых можно конструировать сходящиеся оптимизационные процедуры. При этом известные алгоритмы получаются как частные случаи общей алгоритмической схемы.

В третьем разделе излагаются стохастическое программирование и недоопределенные модели. В стохастическом программировании рассматриваются модели, в которых отдельные или все параметры являются случайными величинами. Такие ситуации типичны для реальных задач, когда трудно определить точные значения переменных.

Метод недоопределенных моделей (Н-моделей) был предложен в начале 80-х годов прошлого столетия для представления и обработки неполностью определенных знаний. Рассматриваемый вначале как оригинальный метод из области искусственного интеллекта, он трансформировался постепенно в прикладную технологию программирования в ограничениях.

В четвертом разделе первой части излагаются основы вариационного исчисления и оптимального управления. Выделены основные типы задач - простейшая задача, задача Больца, изопериметрическая задача, задача о брахистохроне и др. Сформулированы и доказаны необходимые условия слабого локального минимума. Приводятся определение и необходимые условия сильного локального минимума, условие Лежандра. Вводится понятие второй вариации функционала и формулируются условия минимума.

В этом же разделе приводятся основные понятия, определения и классификация задач оптимального управления, изложены необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления. Основным методом построения оптимального решения в этих задачах является принцип максимума Л.С. Понтрягина. Математическая теория оптимального управления была создана в середине 50-х годов прошлого столетия. В теории оптимального управления произошел синтез идей и методов классического вариационного исчисления и современных - принципа максимума Л.С. Понтрягина, принципа оптимальности Р. Беллмана.

Во второй части рассмотрены методы и алгоритмы оптимизации на дискретных моделях, состоящей из трех разделов. В пятом разделе второй части рассмотрены модели и методы решения целочисленных и комбинаторных задач, включающем главы, посвященные основам теории *NP*-полных задач, алгоритмам решения задач дискретного программирования, целочисленного линейного программирования и методам динамического программирования. Метод динамического программирования базируется на принципе оптимальности Р. Беллмана и применим в первую очередь для оптимизации управляемых динамических систем. Рассмотрены этапы решения прикладных задач, сводящиеся к оптимизации управляемых динамических систем.

В шестом разделе рассмотрены основы теории графов, оптимизационные задачи на неориентированных и ориентированных графах. Помимо основных определений и теоретических результатов, которые образуют фундамент для дальнейшего изложения, рассматриваются такие характеристики графов и связанные с ними теоретические результаты, как хроматические и цикломатические числа графов и ряд других характеристик, нередко оказывающихся полезными при решении прикладных задач, например при разработке процедур анализа данных в геоинформационных системах.

Седьмой раздел завершает вторую часть учебника. Целая глава посвящена разработке приближенных методов решения задач дискретной оптимизации. На примере нескольких TVP-полных задач показано несколько подходов к построению алгоритмов полиномиальной сложности, позволяющих решать задачу с заранее заданной точностью. Наряду с этим приводятся примеры задач, для которых построение таких приближенных алгоритмов не существует. Поэтому для получения субоптимальных решений на практике применяются алгоритмы случайного поиска и, в частности, генетические алгоритмы. Изложение этого материала иллюстрируется примерами задач, для решения которых используется современное программное обеспечение.

В третьей части рассмотрены методы решения многокритериальных задач, состоящей из трех разделов. Восьмой раздел посвящен введению в методы решения многокритериальных задач. Приводятся постановки различных задач многокритериальной оптимизации. При этом показано, что подобные задачи возникают при исследовании сложных систем. Целая глава посвящена традиционным методам сведения многокритериальных задач к решению однокритериальных.

Девятый раздел посвящен основам теории отношений и измерений предпочтений. Результаты, изложенные в главах этого раздела используются в завершающем десятом разделе, в котором излагается паретовский подход к решению многокритериальных задач. Основная идея паретовского подхода заключается в том, что выбор окончательного решения целесообразно производить именно из множества Парето, которое можно считать обобщением понятия множества точек экстремума обычной (невекторной) функции.

Благодарность и признательность автор выражает Коваленко А.П., Колобашкину СМ. и Смирнову С.Н, которые стояли у истоков курса «Методы оптимизации». Курсы лекций [59] и [60], изданных в 1990 и 1991 годах соответственно и ставшие в настоящее время библиографической редкостью, активно использованы при подготовке данного учебника (некоторые главы, например главы 2, 3, 7, 17, 20, 21 получили развитие в настоящем учебнике; глава 9, §§ 2-7 из главы 15, главы 16 и 19 приведены полностью).

Главы 26, 27 и 30 написаны совместно с О.А. Рамеевым, глава 29 написана совместно с Н.В. Сацутой. Глава 23, посвященная генетическому алгоритму как эффективному методу стохастического поиска оптимального решения задач большой размерности, написана М.В. Виноградовым.

Автор