ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ... 5

Глава 1. **Вещественные числа** ... 7

§ 1. Множества и основные обозначения ... 7
§ 2. Вещественные числа и их основные свойства ... 9
§ 3. Наиболее употребительные числовые множества ... 14
§ 4. Грани числовых множеств ... 15
§ 5. Абсолютная величина числа ... 19
§ 6. Метод математической индукции ... 22
§ 7. Факториал и формула бинома Ньютона ... 24
1. Факториал (24). 2. Формула бинома Ньютона (25).
§ 8. Контрольные задачи ... 28

Глава 2. **Аналитическая геометрия на плоскости** ... 29

§ 1. Метод координат ... 29
1. Направленные отрезки и их величины. Основное тождество (29). 2. Координаты на прямой. Числовая прямая (31). 3. Прямоугольная (или декартова) система координат на плоскости (37). 4. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости (38). 5. Полярные координаты (42).
§ 2. Множества точек на плоскости и их уравнения ... 44
1. Определение уравнения линии (44). 2. Примеры на нахождение множеств точек (47).
§ 3. Прямые и линейные уравнения ... 52
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (52). 2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом (54). 3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (54). 4. Общее уравнение прямой (55). 5. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках» (56). 6. Угол между двумя прямыми (58). 7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (58). 8. Расстояние от точки до прямой (59). 9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (61). 10. Примеры решения геометрических задач методом координат (62).
§ 4. Линии второго порядка ... 76
1. Эллипс (76). 2. Гипербола (81). 3. Директрисы эллипса и гиперболы (88). 4. Парабола (91).
§ 5. Основные формулы и факты аналитической геометрии на плоскости ... 98
§ 6. Контрольные задачи ... 100

Глава 3. **Теория пределов** ... 105

§ 1. Числовые последовательности ... 105
1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. Прогрессии (105). 2. Ограниченные и неограниченные последовательности (114). 3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (115).

4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (117).

§ 2. Сходящиеся последовательности ... 120

1. Понятие сходящейся последовательности (121). 2. Основные свойства сходящихся последовательностей (127). 3. Предельный переход в неравенствах (138).

§ 3. Монотонные последовательности ... 141

1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей (141). 2. Число e (146).

§ 4. Теорема о вложенных отрезках ... 149

§ 5. Контрольные задачи ... 151

Глава 4. **Функция** ... 153

§ 1. Понятие функции ... 153

1. Определение функции и основные понятия (153). 2. Способы задания функций (156). 3. Понятия сложной и обратной функций (159). 4. Классификация функций (160). 5. Построение графиков функций (162).

§ 2. Предел функции ... 179

1. Предел функции при $x \to x_0$ (179). 2. Предел функции при $x \to x_0 -$ и при $x \to x_0 +$ (185). 3. Предел функции при $x \to \infty$, при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (188).

§ 3. Теоремы о пределах функций ... 191

§ 4. Два замечательных предела ... 194

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел) (194).

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (второй замечательный предел (196).

§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции ... 198

1. Бесконечно малые функции (198). 2. Бесконечно большие функции (200).

§ 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций ... 203

§ 7. Вычисление пределов функции ... 206

§ 8. Понятие непрерывности функции ... 209

1. Определение непрерывности функции (209). 2. Арифметические действия над непрерывными функциями (212).

§ 9. Непрерывность некоторых элементарных функций ... 213

1. Непрерывность рациональных функций (213). 2. Непрерывность тригонометрических функций (214). 3. Непрерывность функции $f(x) = |x|$ (215). 4. Продолжение вычисления пределов функций (216).

§ 10. Определение и классификация точек разрыва функции . 222

§ 11. Теорема о непрерывности сложной функции ... 223

§ 12. Основные свойства непрерывных функций ... 224

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (224). 2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение (225). 3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке (227). 4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней (229). 5. Понятие равномерной непрерывности функции (231). 6. Теорема о равномерной непрерывности функции (234).

§ 13. Теорема о непрерывности обратной функции ... 238

Глава 5. **Дифференциальное исчисление** 242
§ 1. Понятие производной 242
1. Определение производной (242). 2. Геометрический смысл производной (244). 3. Физический смысл производной (246). 4. Правая и левая производные (248).
§ 2. Понятие дифференцируемости функции 249
1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке (249). 2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности (251).
§ 3. Понятие дифференциала 252
1. Определение и геометрический смысл дифференциала (252). 2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала (254).
§ 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного 255
§ 5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции 257
1. Производная постоянной функции (257). 2. Производная степенной функции (257). 3. Производные тригонометрических функций (258). 4. Производная логарифмической функции (260).
§ 6. Теорема о производной обратной функции 262
§ 7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций 263
1. Производная показательной функции (263). 2. Производные обратных тригонометрических функций (264).
§ 8. Правило дифференцирования сложной функции. Дифференциал сложной функции 266
1. Правило дифференцирования сложной функции (266). 2. Дифференциал сложной функции (269).
§ 9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций 270
1. Понятие логарифмической производной функции (270). 2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем (272). 3. Таблица производных простейших элементарных функций (274).
§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков 276
1. Понятие производной n-го порядка (276). 2. n-е производные некоторых функций (277). 3. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций (279). 4. Дифференциалы высших порядков (283).
§ 11. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование 285
1. Параметрическое задание функции (285). 2. Дифференцирование функции, заданной параметрически (287).
§ 12. Основные теоремы дифференциального исчисления 289
§ 13. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя 295
1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (296). 2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (299). 3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие (300).

§ 14. Формула Тейлора 303
1. Формула Тейлора (303). 2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена (305). 3. Формула Маклорена (306). 4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (306). 5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов (308). 6. Вычисление числа e (309).
§ 15. Исследование поведения функций и построение графиков 310
1. Признак монотонности функции (310). 2. Отыскание точек локального экстремума функции (311). 3. Задачи на максимум и минимум (314). 4. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции (317). 5. Асимптоты графика функции (321). 6. Схема исследования графика функции (325).
§ 16. Контрольные задачи 336

Глава 6. **Интегральное исчисление** 338

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл 338
1. Понятие первообразной функции (338). 2. Неопределенный интеграл (340).
§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла 342
§ 3. Таблица основных интегралов 343
§ 4. Основные методы интегрирования 345
1. Непосредственное интегрирование (345). 2. Метод подстановки (349). 3. Метод интегрирования по частям (358).
§ 5. Интегрирование рациональных функций 366
§ 6. Определенный интеграл 374
1. Определение определенного интеграла (374). 2. Основные свойства определенного интеграла (378). 3. Оценки интегралов. Формула среднего значения (380). 4. Условия существования определенного интеграла (383).
§ 7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом 386
§ 8. Формула Ньютона — Лейбница 388
§ 9. Замена переменной в определенном интеграле 392
§ 10. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле 395
§ 11. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла 396
1. Площадь криволинейной трапеции (396). 2. Площадь криволинейного сектора (404). 3. Длина дуги кривой (406). 4. Площадь поверхности вращения (411). 5. Объем тела (415). 6. Центр тяжести кривой и криволинейной трапеции (419). 7. Работа переменной силы (427).
§ 12. Контрольные задачи 429

Ответы, решения, указания к контрольным задачам 432
Предметный указатель 470