

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
<b>Раздел I АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ</b>	
<b>ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ</b>	
<b>§ 1.1. Векторы. Операции над векторами .....</b>	<b>5</b>
1. Скалярные и векторные величины .....	5
2. Угол между векторами. Проекция вектора на ось .....	7
3. Сумма векторов .....	9
4. Разность двух векторов .....	11
5. Произведение вектора на число .....	12
Вопросы для контроля .....	16
Упражнения .....	17
<b>§ 1.2. Координаты вектора и координаты точки .....</b>	<b>17</b>
1. Прямоугольная декартова система координат на плоскости .....	17
2. Прямоугольная декартова система координат в пространстве .....	19
3. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число .....	19
4. Координаты точки .....	20
5. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении .....	21
Вопросы для контроля .....	23
Упражнения .....	23
<b>§ 1.3. Скалярное произведение векторов .....</b>	<b>24</b>
1. Определение скалярного произведения векторов .....	24
2. Свойства скалярного произведения векторов .....	25
3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами .....	27
Вопросы для контроля .....	30
Упражнения .....	30
<b>§ 1.4. Определители второго и третьего порядков .....</b>	<b>31</b>
1. Определитель второго порядка .....	31
2. Определитель третьего порядка .....	32
3. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей .....	36
Вопросы для контроля .....	39
Упражнения .....	40
<b>§ 1.5. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов .....</b>	<b>41</b>
1. Определение векторного произведения .....	41

2. Свойства векторного произведения .....	44
3. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами .....	45
4. Смешанное произведение трех векторов и его геометрический смысл .....	47
Вопросы для контроля .....	50
Упражнения .....	50

## ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

<b>§ 2.1. Линия на плоскости</b> .....	52
1. Уравнения линий на плоскости .....	52
2. Полярная система координат .....	52
Вопросы для контроля .....	54
Упражнения .....	54
<b>§ 2.2. Прямая</b> .....	55
1. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках .....	55
2. Угловой коэффициент прямой .....	57
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору .....	57
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору .....	58
5. Общее уравнение прямой .....	59
Вопросы для контроля .....	61
Упражнения .....	61
<b>§ 2.3. Решение некоторых задач планиметрии</b> .....	62
1. Вычисление угла между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых .....	62
2. Вычисление расстояния от данной точки до заданной прямой .....	64
Вопросы для контроля .....	67
Упражнения .....	67
<b>§ 2.4. Кривые второго порядка</b> .....	68
1. Уравнение второго порядка с двумя переменными. Окружность ... ..	68
2. Эллипс .....	69
3. Гипербола .....	71
4. Парабола .....	74
5. Общее уравнение второго порядка с двумя переменными .....	76
Вопросы для контроля .....	77
Упражнения .....	78

## ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

<b>§ 3.1. Плоскость</b> .....	81
1. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки ... ..	81
2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору .....	82
Вопросы для контроля .....	84
Упражнения .....	84
<b>§ 3.2. Прямая в пространстве</b> .....	85
1. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки .....	85
2. Уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору .....	85
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости .....	87
Вопросы для контроля .....	89
Упражнения .....	89

<b>§ 3.3. Решение некоторых задач стереометрии</b> .....	90
1. Решение стереометрических задач методами векторной алгебры .....	90
2. Вычисление расстояния от данной точки до заданной плоскости .....	92
Вопросы для контроля .....	96
Упражнения .....	96
<b>§ 3.4. Поверхности второго порядка</b> .....	97
1. Общее уравнение второго порядка с тремя переменными .....	97
2. Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры .....	98
3. Эллипсоид .....	99
4. Двуполостный гиперболоид .....	102
5. Однополостный гиперболоид .....	104
6. Эллиптический параболоид .....	105
7. Гиперболический параболоид .....	106
8. Конус .....	108
Вопросы для контроля .....	109
Упражнения .....	109

## Раздел II

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

#### ГЛАВА 4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

<b>§ 4.1. Простейшие понятия теории множеств</b> .....	111
1. Множество и его элементы. Подмножества .....	111
2. Пересечение и объединение множеств .....	112
3. Вычитание множеств. Дополнение до множества. Прямое произведение двух множеств .....	113
Вопросы для контроля .....	114
Упражнения .....	115
<b>§ 4.2. Множество действительных чисел</b> .....	115
1. Рациональные числа .....	115
2. Действительные числа .....	119
3. Абсолютная величина (модуль) действительного числа .....	120
Вопросы для контроля .....	123
Упражнения .....	124
<b>§ 4.3. Числовые множества. Промежутки. Окрестность точки</b> .....	124
1. Промежутки .....	124
2. Ограниченные и неограниченные числовые множества .....	125
3. Числовая плоскость .....	126
Вопросы для контроля .....	126
Упражнения .....	126
<b>§ 4.4. Множество комплексных чисел</b> .....	127
1. Комплексные числа .....	127
2. Модуль комплексного числа .....	131
Вопросы для контроля .....	132
Упражнения .....	133
<b>§ 4.5. Комплексная плоскость. Аргумент комплексного числа</b> .....	134
1. Комплексная плоскость .....	134
2. Аргумент комплексного числа .....	134
Вопросы для контроля .....	137
Упражнения .....	137

## ГЛАВА 5. ФУНКЦИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ

<b>§ 5.1. Функции</b> .....	138
1. Понятие функции.....	138
2. Числовые функции. Способы задания функции.....	138
3. Ограниченность, монотонность, четность, нечетность и периодичность функций.....	140
Вопросы для контроля.....	144
Упражнения.....	145
<b>§ 5.2. Обратная функция. Простейшие элементарные функции</b> .....	146
1. Функция, обратная данной функции.....	146
2. Простейшие элементарные функции.....	147
Вопросы для контроля.....	154
Упражнения.....	155
<b>§ 5.3. Сложная функция. Многочлены и рациональные функции. Класс элементарных функций</b> .....	156
1. Сложная функция.....	156
2. Многочлены.....	158
3. Рациональные функции.....	159
4. Элементарные функции.....	161
Вопросы для контроля.....	163
Упражнения.....	164
<b>§ 5.4. Последовательности</b> .....	164
1. Числовые последовательности.....	164
2. Ограниченные и монотонные последовательности.....	167
Вопросы для контроля.....	168
Упражнения.....	169
<b>§ 5.5. Предел последовательности</b> .....	170
1. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности.....	170
2. Бесконечно малые последовательности.....	172
3. Теоремы о пределах, связанные с арифметическими действиями.....	175
4. Теоремы о пределах, связанные с неравенствами.....	178
5. Бесконечно большие последовательности. Связь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.....	180
6. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число $e$ .....	182
Вопросы для контроля.....	184
Упражнения.....	184
<b>§ 5.6. Предел функции</b> .....	186
1. Предел функции в точке.....	186
2. Теоремы о пределах, связанные с арифметическими действиями.....	188
3. Теоремы о пределах, связанные с неравенствами.....	190
4. Односторонние пределы.....	191
5. Предел функции при $x \rightarrow \pm \infty$ .....	192
6. Бесконечные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.....	194
Вопросы для контроля.....	195
Упражнения.....	195
<b>§ 5.7. Непрерывность функции</b> .....	197
1. Непрерывность функции в точке.....	197
2. Свойства функций, непрерывных в точке.....	199
3. Непрерывность функции на множестве.....	200

4. Точки разрыва и их классификация .....	201
Вопросы для контроля.....	202
Упражнения.....	203
<b>§ 5.8. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы</b>	<b>204</b>
1. Непрерывность простейших элементарных функций .....	204
2. Замечательные пределы.....	209
Вопросы для контроля.....	212
Упражнения.....	212

## ГЛАВА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

<b>§ 6.1. Производная</b> .....	<b>214</b>
1. Задачи, приводящие к понятию производной .....	214
2. Производная функции .....	217
3. Физический и геометрический смысл производной .....	218
4. Вычисление производной на основе ее определения .....	220
5. Непрерывность дифференцируемой функции .....	221
Вопросы для контроля .....	223
Упражнения.....	223
<b>§ 6.2. Производная суммы, разности, произведения и частного функций</b>	<b>223</b>
1. Производная суммы и разности функций.....	223
2. Производная произведения функций.....	224
3. Производная частного двух функций.....	226
Вопросы для контроля.....	227
Упражнения.....	227
<b>§ 6.3. Производная сложной, обратной и параметрически заданной функций</b>	<b>228</b>
1. Производная сложной функции .....	228
2. Производная обратной функции.....	230
3. Производная параметрически заданной функции .....	230
Вопросы для контроля.....	231
Упражнения.....	232
<b>§ 6.4. Производные некоторых элементарных функций</b> .....	<b>232</b>
1. Производная показательной функции .....	232
2. Производная логарифмической функции.....	233
3. Производная степенной функции .....	234
4. Производные тригонометрических функций.....	235
5. Производные обратных тригонометрических функций.....	237
Вопросы для контроля .....	241
Упражнения .....	241
<b>§ 6.5. Производные высших порядков</b> .....	<b>242</b>
1. Вторая производная.....	242
2. Физический смысл второй производной .....	243
Вопросы для контроля .....	244
Упражнения .....	244
<b>§ 6.6. Правило Лопитала</b> .....	<b>245</b>
1. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ .....	245
2. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ , $\infty - \infty$ , $1^\infty$ , $0^0$ , $\infty^0$ .....	248
Вопросы для контроля.....	250
Упражнения.....	251

<b>§ 6.7. Приложения производной к исследованию функций</b> .....	251
1. Уравнения касательной и нормали к кривой .....	251
2. Интервалы монотонности .....	253
3. Экстремумы функции .....	258
Вопросы для контроля .....	261
Упражнения .....	261
<b>§ 6.8. Построение графиков функций</b> .....	262
1. Выпуклость графика функции .....	262
2. Асимптоты графика функции .....	264
3. Построение графика функции .....	266
Вопросы для контроля .....	270
Упражнения .....	271
<b>§ 6.9. Решение задач на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции</b> .....	271
1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке .....	271
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений в геометрических и физических задачах .....	273
Упражнения .....	276
<b>§ 6.10. Дифференциал функции</b> .....	277
1. Определение дифференциала функции .....	277
2. Геометрический смысл дифференциала .....	280
3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям .....	280
Вопросы для контроля .....	282
Упражнения .....	282
<b>§ 6.11. Формула Тейлора</b> .....	282
1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа .....	282
2. Формулы Тейлора для некоторых элементарных функций .....	285
Вопросы для контроля .....	287
Упражнения .....	288

## ГЛАВА 7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

<b>§ 7.1. Неопределенный интеграл и его свойства</b> .....	289
1. Первообразная и неопределенный интеграл .....	289
2. Непосредственное интегрирование .....	291
Вопросы для контроля .....	295
Упражнения .....	295
<b>§ 7.2. Методы интегрирования</b> .....	296
1. Метод замены переменной .....	296
2. Метод интегрирования по частям .....	298
Вопросы для контроля .....	302
Упражнения .....	302
<b>§ 7.3. Некоторые типы интегралов</b> .....	303
1. Интегралы от рациональных функций .....	303
2. Интегралы от иррациональных функций .....	310
3. Интегралы от некоторых трансцендентных функций .....	315
4. «Неберущиеся» интегралы .....	319
Вопросы для контроля .....	319
Упражнения .....	320

## ГЛАВА 8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

<b>§ 8.1. Определенный интеграл и его свойства</b> .....	322
1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.....	322
2. Понятие определенного интеграла. Условие интегрируемости функции на отрезке.....	324
3. Основные свойства определенного интеграла .....	326
Вопросы для контроля .....	329
Упражнения .....	329
<b>§ 8.2. Основные теоремы об определенном интеграле</b> .....	329
1. Теорема о среднем .....	329
2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом .....	330
3. Формула Ньютона Лейбница.....	332
Вопросы для контроля .....	334
Упражнения .....	334
<b>§ 8.3. Методы вычисления определенных интегралов</b> .....	335
1. Метод замены переменной интегрирования (метод подстановки) .....	335
2. Метод интегрирования по частям .....	337
Вопросы для контроля .....	339
Упражнения.....	340
<b>§ 8.4. Приближенное вычисление определенного интеграла</b> .....	341
1. Формула прямоугольников.....	341
2. Формула трапеций .....	344
3. Формула парабол (формула Симпсона).....	345
4. Погрешности формул приближенного вычисления определенного интеграла .....	347
Вопросы для контроля.....	348
Упражнения.....	349
<b>§ 8.5. Геометрические приложения определенного интеграла</b> .....	349
1. Вычисление площадей плоских фигур.....	349
2. Вычисление длин дуг плоских кривых.....	355
3. Вычисление объемов тел вращения.....	357
4. Вычисление площадей поверхностей тел вращения.....	358
Вопросы для контроля .....	359
Упражнения .....	360
<b>§ 8.6. Приложения определенного интеграла к решению физических задач</b> .....	361
1. Задача о вычислении пути .....	361
2. Задача о силе давления жидкости.....	364
3. Работа переменной силы .....	366
4. Вычисление статических моментов и координат центра масс плоской кривой .....	368
5. Вычисление статических моментов и координат центра масс плоской фигуры .....	372
Вопросы для контроля .....	374
Упражнения .....	374

## ГЛАВА 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

<b>§ 9.1. Функции нескольких переменных</b> .....	376
1. Задачи, приводящие к понятию функции нескольких переменных .....	376
2. Определение функции нескольких переменных .....	377

3. Предел и непрерывность функции двух переменных .....	379
Вопросы для контроля .....	381
Упражнения .....	381
<b>§ 9.2. Дифференцирование функций двух переменных .....</b>	<b>382</b>
1. Частные производные .....	382
2. Геометрический смысл частных производных .....	384
3. Дифференцируемость и полный дифференциал .....	385
4. Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных .....	387
5. Дифференцирование сложной функции .....	389
Вопросы для контроля .....	391
Упражнения .....	392
<b>§ 9.3. Экстремум функции двух переменных. Формула Тейлора .....</b>	<b>392</b>
1. Определение экстремума функции двух переменных .....	392
2. Формула Тейлора для функции двух независимых переменных .....	393
3. Достаточное условие экстремума функции двух переменных .....	394
Вопросы для контроля .....	398
Упражнения .....	398
<b>§ 9.4. Уравнения касательной к кривой в пространстве. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности .....</b>	<b>398</b>
1. Уравнения касательной к кривой в пространстве .....	398
2. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности .....	400
Вопросы для контроля .....	403
Упражнения .....	403
<b>ГЛАВА 10. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b>	
<b>§ 10.1. Двойной интеграл .....</b>	<b>404</b>
1. Определение двойного интеграла (случай прямоугольника) .....	404
2. Двойной интеграл (случай произвольной области) .....	408
3. Замена переменных в двойном интеграле .....	410
Вопросы для контроля .....	413
Упражнения .....	414
<b>§ 10.2. Приложения двойного интеграла к задачам физики и геометрии .....</b>	<b>415</b>
1. Масса пластинки .....	415
2. Статические моменты и центр тяжести пластинки .....	417
3. Моменты инерции пластинки .....	419
4. Объем тела .....	421
Вопросы для контроля .....	423
Упражнения .....	423
<b>§ 10.3. Тройной интеграл .....</b>	<b>424</b>
1. Определение тройного интеграла .....	424
2. Приложения тройного интеграла .....	427
Вопросы для контроля .....	433
Упражнения .....	433
<b>§ 10.4. Основные понятия векторного анализа .....</b>	<b>434</b>
1. Скалярные и векторные поля. Векторы, зависящие от скалярного аргумента .....	434
2. Понятие производной векторной функции скалярного аргумента .....	436

3. Производная по направлению, градиент, потенциал векторного поля	438
Вопросы для контроля	443
Упражнения	443
<b>§ 10.5. Криволинейные интегралы</b>	443
1. Криволинейный интеграл первого рода	443
2. Криволинейный интеграл второго рода	447
3. Формула Римана — Грина	450
Вопросы для контроля	453
Упражнения	454
<b>§ 10.6. Поверхностный интеграл первого рода</b>	454
1. Поверхность в пространстве	454
2. Площадь поверхности	455
3. Определение поверхностного интеграла первого рода	459
Вопросы для контроля	460
Упражнения	461
<b>§ 10.7. Поверхностный интеграл второго рода</b>	461
1. Определение поверхностного интеграла второго рода	461
2. Дивергенция векторного поля. Формула Гаусса — Остроградского	465
3. Ротор векторного поля. Формула Стокса	468
Вопросы для контроля	474
Упражнения	474

### Раздел III ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

#### ГЛАВА 11. РЯДЫ

<b>§ 11.1. Числовые ряды</b>	475
1. Числовой ряд и его сумма	475
2. Основные теоремы о сходимости числовых рядов	477
3. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения	479
4. Признаки Даламбера и Коши	481
5. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Лейбница	485
Вопросы для контроля	488
Упражнения	488
<b>§ 11.2. Степенные ряды</b>	489
1. Понятие степенного ряда. Радиус сходимости. Теорема Абеля	489
2. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов	494
3. Ряды Тейлора некоторых элементарных функций	496
4. Вычисление «неберущихся» интегралов с помощью степенных рядов	500
5. Степенные ряды с комплексными членами. Формула Эйлера	501
Вопросы для контроля	503
Упражнения	503
<b>§ 11.3. Ряды Фурье</b>	504
1. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T=2\pi$	504
2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций	509
3. Сходимость ряда Фурье	513
4. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T=2l$	515
5. Разложение в ряд Фурье непериодических функций	519
6. Комплексная форма ряда Фурье	520
Вопросы для контроля	523
Упражнения	523

## ГЛАВА 12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

<b>§ 12.1. Понятие о дифференциальном уравнении</b> .....	526
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям .....	526
2. Общее решение дифференциального уравнения .....	528
3. Начальные условия и задача Коши .....	529
Вопросы для контроля .....	530
Упражнения .....	530
<b>§ 12.2. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений первого по рядка</b> .....	531
1. Уравнение с разделяющимися переменными .....	531
2. Однородное уравнение .....	535
3. Линейное уравнение .....	537
Вопросы для контроля .....	539
Упражнения .....	540
<b>§ 12.3. Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка</b> .....	541
1. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка .....	541
2. Нахождение общего решения линейного однородного уравнения .....	546
3. Отыскание частного решения линейного неоднородного уравнения в случае квазимногочленов .....	551
Вопросы для контроля .....	556
Упражнения .....	556
<b>§ 12.4. Дифференциальное уравнение колебаний</b> .....	557
1. Задачи, приводящие к дифференциальному уравнению колебаний .....	557
2. Решение задачи Коши для уравнения колебаний .....	559
3. Свободные колебания .....	561
4. Вынужденные колебания. Амплитудно-частотная характеристика и резонанс .....	562
Вопросы для контроля .....	563
Упражнения .....	564
Предметный указатель .....	565